# 1. Introducción

Una *asignación* consiste en repartir una cierta cantidad de objetos entre un determinado número de conjuntos. Las asignaciones que nos interesan son aquellas en que los objetos no se pueden dividir.

Por ejemplo, repartir 12 manzanas entre 5 cestas *sin romper las manzanas*. Podríamos colocar todas las manzanas en una sola cesta; o colocar dos manzanas en cuatro de ellas y en la quinta cesta las 4 manzanas restantes. Para repartir las manzanas entre las cestas debemos, por tanto, aunar algunos criterios que permitan aplicar la repartición sin dejar lugar a dudas que el proceso pueda ser efectuado en forma transparente, objetiva y sin contradicciones.

Si en lugar de manzanas pensamos en escaños de la Cámara de Diputados (120 en la legislación vigente), y que las cestas representan las 15 regiones del país, el correspondiente problema de asignación consiste en generar una forma de repartir los 120 escaños entre las 13 regiones.

Según la Constitución de 1980, a la región metropolitana le corresponde elegir a 32 diputados. El problema de asignación es ¿ Cómo repartir estos 32 escaños en la Región Metropolitana entre los partidos políticos que compiten en una elección ?

Asignar escaños entre regiones o entre partidos políticos o entre listas, o entre pactos corresponden a un mismo problema matemático.

El *algoritmo de asignación* (o fórmula) debe ser estable y objetivo, es decir, que no haya dudas en su aplicación. La *representatividad parlamentaria* aparece entonces como una característica de la democracia y, en consecuencia, los criterios que definan un sistema de asignación parlamentaria deben explicitar qué idea de representatividad subyace al mismo.

# 2. Los métodos proporcionales

La esencia de los métodos proporcionales es simple de explicar. La representación en el parlamento de una lista (ó partido) debería ser proporcional a la votación obtenida por la lista (ó partido) en la elección. Precisando, cada partido **debería estar representado en el parlamento en la misma proporción de los votos obtenidos en la correspondiente elección**.

**Ejemplo.** Parlamento de tamaño $h = 27$ sillas y tres listas $A, B, C$ con la distribución de votos $A =$ 43.000 , $B =$ 30.000 y $C =$ 27.000. Sea $P =$ 100.000 la cantidad total de votos. La razón electoral de cada partido es el cociente entre los votos obtenidos y la cantidad total de votantes.

Al aplicar la proporcionalidad a este parlamento con 27 miembros la proporción de 0,43 debe ser asignada a la lista A, es decir,

$$\frac{43}{100} = \frac{x}{27} \Rightarrow x = \frac{43}{100} \cdot 27 = 11,61$$

| Lista | Votos | Razón electores |
|---|---|---|
| A | 43.000 | 0,43 |
| B | 30.000 | 0,30 |
| C | 27.000 | 0,27 |
| Total | 100.000 | 1,00 |

Tabla 1: Razón electoral

| Lista | Sillas | Razón electores |
|---|---|---|
| A | 11,61 | 0,43 |
| B | 8,10 | 0,30 |
| C | 7,29 | 0,27 |
| Total | 27,00 | 1,00 |

Tabla 2: Asignación de 27 sillas

Cuadro 2 muestra las proporciones en el parlamento para las otras listas. Lo cual produce un problema, la asignación debe ser un número entero.

### 2.1. La Cuota exacta

A pesar de que la proporción exacta no resuelve el problema, pues no es posible partir en fracciones a un senador (o a un diputado) ella mide de alguna forma cuán proporcional es una asignación parlamentaria. La cuota exacta de una lista $l$ es la proporción $q_l$ definida por

$$q_l = \frac{p_l}{P} \cdot h$$

donde $p_l$ es la votación obtenida por la lista $l$, $P$ es la totalidad de los votos emitidos y $h$ es el tamaño del parlamento (o sillas a repartir).

Observemos que si sumamos las cuotas exactas de todas las listas que han competido en la elección se obtiene la cantidad de sillas a repartir,

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 + \cdots + q_s &= \frac{p_1}{P} \cdot h + \frac{p_2}{P} \cdot + \cdots + \frac{p_s}{P} \cdot h \\ &= h \left( \frac{p_1}{P} + \frac{p_2}{P} + \cdots + \frac{p_s}{P} \right) = h \cdot \frac{P}{P} \\ &= h \end{aligned}$$

**Definición 2.1** *Un método de Asignación Parlamentaria respeta la cuota si la asignación $a_i$ para cada lista $l_i$ se encuentra entre $[q_i]$ y $[q_i] + 1$ donde $q_i$ es la cuota exacta de lista i y $[q_i]$ representa la parte entera de ella, es decir,*

$$[q_i] \leq a_i \leq [q_i] + 1$$

Esta propiedad salvaguarda en cierta medida la proporcionalidad ideal, es decir, asegura que una lista nunca va a estar sobrestimada ni subestimada. Más precisamente la cantidad de sillas que obtiene la lista *no se aleja mucho de la cuota exacta, que sería la asignación exacta*.

La Cámara de Diputados está compuesta por $120$ diputados. Se eligen dos diputados por cada una de las $60$ circunscripciones en que está dividido el país. Luego se compite para optar a dos sillas. En los últimos procesos eleccionario han competido las listas:

$$\begin{aligned} l_1 &= \text{Alianza} \\ l_2 &= \text{Concertación} \\ l_3 &= \text{Juntos Podemos} \\ l_4 &= \text{Independientes} \end{aligned}$$

para ocupar un parlamento de $h = 2$ dos sillas. El universo de votantes es el padrón electoral de la circunscripción respectiva. Esta es la característica del **Sistema Binominal** imperante en Chile en la actualidad.

## 3. Cifra repartidora

El algoritmo de asignación en su forma más usual, es el siguiente:

**Método Cifra Repartidora**

(a) Se considera la votación de cada lista.

(b) Se divide la votación de cada lista por 1, por 2, por 3 y así sucesivamente hasta el número de escaños que haya en disputa.

(c) Se ordenan de mayor a menor los cocientes resultantes de la división realizada en el punto anterior.

(d) Se seleccionan los primeros $h$ ($h =$ número de representantes a elegir) cocientes. Cada lista elige un número de representantes igual al número de cocientes seleccionados.

Calculemos la asignación mediante Cifra Repartidora en una elección en que compiten tres listas $A, B, C$ con la distribución de votos dadas en el Cuadro 3.

| Lista | Votos | Razón electores |
|---|---|---|
| A | 43.000 | 0,43 |
| B | 30.000 | 0,30 |
| C | 27.000 | 0,27 |
| Total | 100.000 | 1,00 |

Tabla 3: Distribución de votos para asignar sillas con el método de CR

Una manera directa de hacer este cálculo consiste en crear una tabla con los valores de estas razones. Por ejemplo, si queremos elegir 8 sillas con la distribución de votos dada por la Tabla No. calculamos

| División por | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $p_1$ | $p_1/2$ | $p_1/3$ | $p_1/4$ | $p_1/5$ | $p_1/6$ | $p_1/7$ | $p_1/8$ |
| $B$ | $p_2$ | $p_2/2$ | $p_2/3$ | $p_2/4$ | $p_2/5$ | $p_2/6$ | $p_2/7$ | $p_2/8$ |
| $C$ | $p_3$ | $p_3/2$ | $p_3/3$ | $p_3/4$ | $p_3/5$ | $p_3/6$ | $p_3/7$ | $p_3/8$ |

Reemplazando los valores obtenemos la matriz de números siguientes:

| División por | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 43000 | 21500 | 14333, 333 | 10750 | 8600 | 7166, 666 | 6142, 85714 | 5375 |
| $B$ | 30000 | 15000 | 10000 | 7500 | 6000 | 5000 | 4285, 71429 | 3750 |
| $C$ | 27000 | 13500 | 9000 | 6750 | 5400 | 4500 | 3857, 14286 | 3375 |

Por ejemplo, si debemos asignar tres sillas elegimos de esta tabla los tres números mayores y se la damos a las lista correspondientes. Si hay que asignar 5 sillas elegimos los cinco mayores de la tabla y se les da las sillas a las listas correspondientes. La siguiente tabla muestra la asignación de cada silla,

| Silla | 1a. | 2a. | 3a. | 4a. | 5a. | 6a. | 7a. | 8a. | 9a. | 10a. | 11a. | 12a. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| B | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| C | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

De esta manera si hay que elegir 6 sillas (u ocho ) ellas quedan distribuidas de la siguiente manera:

| | |
|---|---|
| Lista A = 3 sillas | Lista A = 4 sillas |
| Lista B = 2 sillas | Lista B = 2 sillas |
| Lista C = 1 sillas | Lista C = 2 sillas |

La tabla 4 muestra el comportamiento de las asignaciones a cada lista o partido (A,B ,C) mediante el método de cifra repartidora. Dejamos como ejercicio comprobar estos resultados.

| Partido | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 12 |
| B | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 |
| C | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 |
| **Total Sillas** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** | **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** | **27** |

Tabla 4: Comportamiento de asignación de sillas según Cifra Repartidora

### 3.1. Aplicación del Método de Cifra Repartidora

Apliquemos este sistema de asignación para repartir 120 escaños en la Cámara de Diputados entre las 13 regiones, tomando en cuenta el número de electores inscritos en cada una de ellas hasta el 2005. Tanto los datos como los resultados pueden verse en la Tabla 5. Se aprecia que el número de escaños que cada región recibe es proporcional al porcentaje de electores inscritos en cada una de ellas. De hecho, el porcentaje de escaños recibidos es “bastante similar” al porcentaje de electores inscritos en cada región. Así, por ejemplo, la Región Metropolitana obtiene el mayor número de escaños de acuerdo al mayor porcentaje de electores que tiene. En el caso extremo, la undécima región tiene el menor porcentaje de electores, no obteniendo escaño alguno.

| **Región** | **Total de electores** | **Porcentaje con respecto al total de inscritos** | **Asignación de escaños** | **Proporción con respecto al total de escaños** | **Cuota exacta** |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 231.211 | 2,8 % | 3 | 2,5 % | 3,37 |
| II | 244.357 | 3,0 % | 3 | 2,5 % | 3,57 |
| III | 135.656 | 1,7 % | 2 | 1,7 % | 1,98 |
| IV | 312.401 | 3,8 % | 4 | 3,3 % | 4,56 |
| V | 913.020 | 11,1 % | 14 | 11,7 % | 13,33 |
| VI | 445.968 | 5,4 % | 6 | 5,0 % | 6,51 |
| VII | 523.812 | 6,4 % | 8 | 6,7 % | 7,65 |
| VIII | 1.070.302 | 13,0 % | 16 | 13,3 % | 15,62 |
| IX | 496.279 | 6,0 % | 7 | 5,8 % | 7,24 |
| X | 598.108 | 7,3 % | 9 | 7,5 % | 8,73 |
| XI | 57.215 | 0,7 % | 0 | 0,0 % | 0,84 |
| XII | 99.910 | 1,2 % | 1 | 0,8 % | 1,46 |
| RM | 3.092.658 | 37,6 % | 47 | 39,2 % | 45,14 |

Tabla 5: Asignación de 120 escaños entre las 13 regiones considerando el número de electores mediante el método de cifra repartidora

### 3.2. Otros sistemas proporcionales

Un sistema de asignación parlamentaria consiste en definir una regla de priorización entre regiones (respectivamente, listas) que depende de la cantidad de escaños ya obtenidos y del número de electores de cada región (respectivamente, del número de votos de cada lista). Las priorizaciones van cambiando a medida que se van asignando escaños, de forma que la asignación final de escaños sea lo más equitativa posible. El *procedimiento de asignación parlamentaria* consiste, por tanto, de $h+1$ etapas, donde $h$ representa el número total de escaños en disputa. Específicamente, los métodos de Huntington se definen por medio del siguiente procedimiento:

> Paso 1: Antes de asignar el primer escaño, todas las regiones (respectivamente, listas) comienzan con 0 escaños[1].
>
> Paso 2: Supongamos que se va a asignar el $l$-ésimo escaño, lo que significa que se han repartido $l-1$ escaños (con $1 \leq l \leq h$). Dicho escaño lo obtiene la región (respectivamente, lista) que tiene la primera prioridad, la cual depende de su número de electores (respectivamente, votos) y de los $l-1$ escaños ya asignados.

El procedimiento anterior define *una familia* de métodos de asignación monótonos y consistentes: hay tantos métodos como reglas de priorización hay. Dichas reglas se especifican por medio de una función $r(p,a)$ positiva que depende de dos argumentos: de la cantidad $p$ de electores que tiene una región (respectivamente, votos que tiene una lista) y de la cantidad $a$ de escaños ya obtenidos. Huntington (1928) especificó cinco diferentes funciones $r(p,a)$, cada una de las cuales caracteriza cinco sistemas de asignación parlamentaria que tienen larga data histórica: **el método de cifra repartidora (CR), el de Pequeños Divisores (PD), el de Media Armónica (MA), el de Proporciones Iguales (IP)y el de Webster (W).**

### 3.3. Ejemplos de asignaciones de escaños con datos chilenos

Ilustremos los cinco métodos de Huntington con tres tipos de datos: el primero con la asignación de 120 escaños entre las 13 regiones del país, considerando el total de electores inscritos en cada una de ellas; ver Tabla 5. Los resultados están resumidos en la Tabla 7.

Se puede apreciar cuán diferentes son las asignaciones, a excepción de las que se obtienen con el método de Media Armónica y de Iguales Proporciones (no siempre ocurre el que estas asignaciones sean iguales). Es interesante enfatizar que, contrariamente al método de cifra repartidora, los restantes métodos de Huntington asignan al menos un escaño a cada región. Esta propiedad es solo característica de tres métodos –siempre y cuando hayan más escaños que regiones: el de Media Armónica, el de Pequeños

[1]Hay sistemas de asignación que parten asignando un escaño a cada región. De ahí que tenga sentido especificar claramente que al principio no se asignen escaños.

| **Región** | $h = 114$ | $h = 115$ | $h = 116$ | $h = 117$ | $h = 118$ | $h = 119$ | $h = 120$ |
|---:|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| II | 3 | 3 | **4** | 4 | 4 | 4 | 4 |
| III | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| IV | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | **5** | 5 |
| V | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| VI | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| VII | 7 | 7 | 7 | 7 | **8** | 8 | 8 |
| VIII | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| IX | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| X | 8 | 8 | 8 | **9** | 9 | 9 | 9 |
| XI | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| XII | 1 | **2** | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| RM | 44 | 44 | 44 | 44 | 44 | 44 | **45** |

Tabla 6: Asignaciones de escaños utilizando el método de iguales proporciones

| **Región** | **Cuota exacta** | **Cifra repartidora** | **PD** | **MA** | **IP** | **W** |
|---:|---|---|---|---|---|---|
| I | 3,37 | 3 | 4 | 3 | 3 | 3 |
| II | 3,57 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| III | 1,98 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| IV | 4,56 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| V | 13,33 | 14 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| VI | 6,51 | 6 | 7 | 6 | 6 | 6 |
| VII | 7,65 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| VIII | 15,62 | 16 | 15 | 15 | 15 | 16 |
| IX | 7,24 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| X | 8,73 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| XI | 0,84 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| XII | 1,46 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| RM | 45,14 | 47 | 43 | 45 | 45 | 45 |

Tabla 7: Asignaciones de 120 escaños utilizando los cinco método de Huntington

Divisores y el de Iguales Proporciones. Este ejemplo puede ser complementado con las asignaciones consignadas en la Tabla 10, donde se realiza el mismo ejercicio, pero esta vez asignando 150 escaños.

Un segundo ejemplo está basado en la asignación de 32 escaños en la Cámara de Diputados entre 10 partidos o listas, tomando en cuenta la cantidad de votos que obtuvieron en la última elección realizada en octubre de 2005. Las asignaciones que se obtienen con los cinco métodos de Huntington, junto a los votos obtenidos, están consignadas en la Tabla 8.

| **Lista** | **Votos obtenidos** | **Cuota exacta** | **Cifra repartidora** | **PD** | **MA** | **IP** | **W** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PS | 256.305 | 3.24 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| PDC | 463.391 | 5.86 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| PH | 55.288 | 0.70 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| PCCH | 159.869 | 2.02 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| RN | 364.590 | 4.61 | 5 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| UDI | 611.447 | 7.74 | 9 | 7 | 7 | 7 | 8 |
| ILC | 17.754 | 0.22 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| ILB | 46.612 | 0.59 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| ILD | 32.271 | 0.41 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| PPD | 520.834 | 6.59 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| **Total** | **2.528.361** | **32** | **32** | **32** | **32** | **32** | **32** |

Tabla 8: Asignación de escaños en la Región Metropolitana para 10 partidos

Aquí se puede apreciar que efectivamente son los métodos de iguales proporciones, de media armónica y de pequeños divisores los que siempre otorgan un escaño a cada lista. Por el contrario, el método de cifra repartidora y el método de Webster pueden dejar listas sin asignación.

Finalmente, y motivados por algunas propuestas de asignación de escaños, supongamos que debemos reasignar entre los 16 distritos de la Región Metropolitana los 47 escaños que el método de cifra repartidora le asignó. A fin de ilustrar cómo varían las asignaciones que se obtienen por el método de cifra repartidora, mostramos diferentes escenarios definidos por diferentes totales de escaños. Los resultados se resumen en la Tabla 9.

| Distrito | Número de electores | $h = 40$ | $h = 41$ | $h = 42$ | $h = 43$ | $h = 44$ | $h = 45$ | $h = 46$ | $h = 47$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 172.879 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 17 | 190.507 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 18 | 206.281 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 19 | 140.098 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 20 | 283.287 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| 21 | 214.321 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 22 | 145.355 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 23 | 227.620 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 24 | 158.035 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 25 | 195.766 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 26 | 169.478 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 27 | 205.970 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 28 | 194.528 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 29 | 218.960 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 30 | 181.230 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 31 | 188.343 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

Tabla 9: Asignación de escaños entre 16 distritos de la Región Metropolitana usando el método de cifra repartidora

| Región | Total de electores | Cuota exacta | Cifra reàrtidora | PD | MA | IP | W | Q |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 231.211 | 4,22 | 4 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| II | 244.357 | 4,46 | 4 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| III | 135.656 | 2,48 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| IV | 312.401 | 5,70 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| V | 913.020 | 16,66 | 17 | 16 | 17 | 17 | 17 | 17 |
| VI | 445.968 | 8,14 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| VII | 523.812 | 9,56 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| VIII | 1.070.302 | 19,53 | 20 | 19 | 19 | 19 | 20 | 20 |
| IX | 496.279 | 9,06 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| X | 598.108 | 10,91 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 |
| XI | 57.215 | 1,04 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| XII | 99.910 | 1,82 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| RM | 3.092.658 | 56,43 | 59 | 55 | 56 | 56 | 56 | 57 |

Tabla 10: Asignación de 150 escaños entre las 13 regiones considerando el número de electores