CONCEPTOS BASICOS DE MATEMÁTICA ELECTORAL

Definimos en forma precisa el concepto de asignación parlamentaria desde un punto de vista matemático.

Una *elección* es un proceso en que compiten $l_1, l_2, \ldots, l_s$ listas para obtener sillas de un parlamento de *h* miembros. Denotaremos por $p_1, p_2, \ldots, p_s$ los votos recibidos respectivamente por cada una de las listas $l_1, l_2, \ldots, l_s$.

Definición.
Una *Asignación Parlamentaria* para una votación con $l_1, l_2, \ldots, l_s$ listas es una función $A: \mathbb{Z}_+ \to \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{s}$

definida por $A(n) = (a_1(n), a_2(n), \ldots, a_s(n))$ donde se cumplen las siguientes condiciones:

(A1) $a_i(n) \geq 0$, $a_i(n) \in \mathbb{Z}$ para todo n y para todo $i = 1, \ldots, s$.

(A2) $a_1(n) + a_2(n) + \cdots + a_s(n) = n$.

Cada $a_i(n)$ representa la cantidad de sillas que recibe la lista l_i de un parlamento de n miembros. Evidentemente que el número $a_i(n)$ depende de la cantidad de votos recibidos por la respectiva lista *i*.

Por ejemplo si hay que elegir un presidente de curso en un curso con 45 alumnos se tiene que el parlamento consiste de solo una silla y las listas corresponden a los diferentes candidatos. En esta situación el problema de asignación es simple pues se elige aquel que obtiene más votos de entre los candidatos. Sin embargo puede haber otras formas de elección. Por ejemplo, se puede convenir una elección en dos rondas donde en la segunda compiten los dos candidatos que obtengan las dos primeras mayorías de la primera ronda, suponiendo que hay más de dos candidatos.

En la competencia por obtener escaños en el Congreso, lugar donde se estudian y aprueban las leyes, los diferentes partidos presentan candidatos y el ciudadano vota por el candidato que ha seleccionado. Una vez terminado el proceso de votación se aplica el algoritmo matemático establecido en las leyes de elecciones que determina finalmente quienes de los candidatos obtienen las sillas en competencia.

Es razonable pedir que cualquier método de asignación parlamentaria satisfaga la condición: listas que hayan obtenido la mayor cantidad de votos debería obtener la mayor cantidad de sillas del parlamento. Este objetivo es común de la totalidad de los métodos de asignación conocidos. Sin embargo, *medir cuan mayor debe de ser la representación, depende fuertemente del algoritmo de asignación aplicado*.

Definición.
Sean $l_1, l_2, \ldots, l_s$ listas que han obtenido $p_1, p_2, \ldots p_s$ votos. La *cuota exacta de la lista* l_i es la proporción

$$q_i = \frac{p_i}{P} h$$

donde $P = p_1 + p_2 + \ldots + p_s$ es la totalidad de los votos emitidos y *h* es el tamaño del parlamento (o sillas a repartir).

Definición.
Diremos que una Asignación Parlamentaria $A(n) = (a_1(n), a_2(n), \ldots, a_s(n))$ es *monótona* si para una distribución de votos $p_1, p_2, \ldots, p_s$ fija, se tiene que

$$a_1(n+1) \geq a_1(n)\ ,\ a_2(n+1) \geq a_2(n)\ ,\ \ldots, a_s(n+1) \geq a_s(n)\ ,$$

para todo *n*.

Diremos que la AP no es monótona si alguna de las desigualdades no se cumple. Por ejemplo, la asignación parlamentaria de Hamilton no es monótona.

Definición.
Diremos que una Asignación Parlamentaria $A(n) = (a_1(n), a_2(n), \ldots, a_s(n))$ satisface la cuota si $[q_i(n)] \leq a_i(n) \leq [q_i(n)] + 1$, para todo $n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq i \leq s.$

Proposición. El método de Hamilton satisface la cuota.

Definición. Una asignación produce una paradoja de Alabama si ella no es monótona. Es decir, existe un entero *k* donde al menos una de las *s* desigualdades no se cumple.

Teorema.
Debido a su construcción, todos los cinco métodos de asignación de Huntington son monótonos